VEKTOROVÉ PROSTORY

V ... množina, P ... pole

$+ : V \times V \to V$, $(a,b) \mapsto a+b$

$\cdot : P \times V \to V$, $(p,a) \mapsto p \cdot a$

$0 \in V$

$V \to V$, $a \mapsto -a$ $\quad \forall a,b,c \in V$, $\forall p,q \in P$.

1) $a + b = b + a$
2) $a + (b + c) = (a+b) + c$
3) $a + 0 = a$
4) $a + (-a) = 0$
5) $1 \cdot a = a$
6) $p \cdot (q \cdot a) = (p \cdot q) \cdot a$
7) $(p+q) \cdot a = (p \cdot a) + (q \cdot a)$
8) $p \cdot (a+b) = (p \cdot a) + (p \cdot b)$

Potom V je <u>vektorový prostor nad polem P</u>.

<u>Příklad</u> 1) $V = \{0\}$ $\quad V \times V \to V$, $(0,0) \mapsto 0$

$P \times V \to V$, $(p,0) \mapsto 0$

2) $V = P$

3) P ... pole, $V = P \times P = P^2$

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$p \cdot (x, y) = (p \cdot x, p \cdot y)$

$(0,0)$

4) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\quad$ (A^B = mn. vš. zobr. z B do A)

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$V(P)$ ... vekt. prostor V nad P.

$u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$, $p_1, \ldots, p_n \in P$.

$p_1 u_1 + p_2 u_2 + \ldots + p_n u_n \in V$ je lineární kombinace vektorů $u_1, \ldots, u_n$ s koeficienty $p_1, \ldots, p_n$.

Vektory $u_1, \ldots, u_n \in V$ GENERUJÍ prostor V, jestliže každý vektor $v \in V$ je jejich lineární kombinací.

$\mathbb{R}^3$ $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

$$(a,b,c) = a\cdot(1,0,0) + b\cdot(0,1,0) + c(0,0,1)$$

$(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1), (0,0,1)$

$$(a,b,c) = a(1,0,0) - b(1,0,0) + b(1,1,0) + 0\cdot(1,1,1) + c(0,0,1) =$$
$$= (a-b)\cdot(1,0,0) + b\cdot(1,1,0) + 0\cdot(1,1,1) + c(0,0,1)$$

Vektorový prostor s konečnou množinou generátorů se nazývá KONEČNĚROZMĚRNÝ. Prostor, který není konečnărozměrný, se nazývá NEKONEČNĚROZMĚRNÝ.

$V(P)$

vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ, jestliže platí

$p_1 v_1 + \dots + p_n v_n = 0$, kde $p_1, \dots, p_n \in P$, potom $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$.

vektory, které nejsou lin. nez., jsou LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ.

Příklad 1) $\mathbb{R}(\mathbb{R})$ $\quad 1, 2 \in \mathbb{R}$

$$p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 2 = 0$$

$$p_1 = 2,\ p_2 = -1$$

$$p \cdot 2 = 0 \Rightarrow p = 0$$

2) $\mathbb{R}^3$ $\quad (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

$$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$(a,b,c) = (0,0,0) \Rightarrow a = b = c = 0.$$

$$(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1), (0,0,1)$$

$$a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) + d(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$(a+b+c, b+c, c+d) = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \\ c+d &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (0, t, -t, t)$$

$t = 1$

$(0, 1, -1, 1)$

$$0 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (1,1,0) - 1 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (0,0,1) = (0,0,0)$$

Tv: Vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je lineární kombinací ostatních.

Důkaz „$\Rightarrow$" $v_1, \dots, v_n$ jsou lin. záv.

$\Rightarrow \exists\, p_1, \dots, p_n \in P$, $p_i \neq 0$ a

$$p_1 v_1 + \dots + p_i v_i + \dots + p_n v_n = 0$$

$$v_i = -\frac{p_1}{p_i} v_1 - \dots - \frac{p_{i-1}}{p_i} v_{i-1} - \frac{p_{i+1}}{p_i} v_{i+1} - \dots - \frac{p_n}{p_i} v_n$$

„$\Leftarrow$" $v_i = p_1 v_1 + \dots + p_{i-1} v_{i-1} + p_{i+1} v_{i+1} + \dots + p_n v_n$

$$p_1 v_1 + \dots + p_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + p_{i+1} v_{i+1} + \dots + p_n v_n = 0$$

$\Rightarrow$ lin. závislé.